

Dai numeri naturali ai numeri reali

3.1 Introduzione

In questa unità didattica vogliamo riprendere rapidamente le nostre conoscenze sugli insiemi numerici (**N**, **Z** e **Q**), e successivamente ampliarle a comprendere i numeri irrazionali e i numeri reali. A tal fine riprenderemo in maniera organica le motivazioni, storiche e non, che hanno portato, a partire dall'insieme dei numeri naturali, all'introduzione di insiemi numerici più vasti, piuttosto che ripassare la definizione delle operazioni e le relative proprietà in tali insiemi. Vedremo quindi che motivazioni analoghe portarono (e portano) all'introduzione dei numeri irrazionali, sui quali si può operare in maniera consueta. Definito l'insieme **R** dei numeri reali (unione degli insiemi di numeri razionali e irrazionali), ci occuperemo di un aspetto operativo fondamentale del calcolo numerico, ossia degli errori di approssimazione.

3.2 Dai naturali ai razionali

I numeri **naturali**, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ sono stati creati dalla mente umana per contare gli oggetti di vari insiemi, e non hanno alcun riferimento alle caratteristiche individuali degli oggetti contati; ad esempio il numero "6" è un'*astrazione* di tutti gli effettivi insiemi contenenti sei oggetti, e non dipende né dalle qualità specifiche di tali oggetti né dal simbolo utilizzato.

I numeri **interi relativi**, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$ di cui si ha traccia già nel VI secolo d.C., sono stati utilizzati per rappresentare grandezze che possono essere considerate in due versi opposti, per la prima volta da Newton nel '600. Ad esempio:

- la **temperatura** di una località o di un corpo può essere *al disopra* o *al disotto* dello zero (essendo lo 0° la temperatura del ghiaccio fondente);
- l'**altitudine** di un punto della terra può trovarsi *al disopra* o *al disotto* del livello del mare (livello che si assume, per convenzione, come altitudine zero).

A fianco di questa motivazione *pratica* dell'estensione dei numeri naturali agli interi relativi ve n'è un'altra, più sottile e prettamente *aritmetica*: nell'insieme dei numeri naturali si possono sempre eseguire le operazioni fondamentali di addizione e moltiplicazione, ma non le "operazioni inverse", ossia la sottrazione e la divisione. Limitiamoci per ora a considerare la sottrazione: la differenza $a - b$ dei due numeri naturali a e b , definita come quel numero naturale x tale che $b + x = a$, ha significato solo con la restrizione $a > b$, perché solo in tal caso la differenza x è un numero naturale. I passi fondamentali per rimuovere tale restrizione furono l'introduzione dei simboli $-1, -2, -3, \dots$ e la definizione

$$a - b = -(b - a) \quad \text{se } a < b$$

Ciò ha reso la sottrazione possibile senza restrizioni nell'insieme dei numeri interi positivi e negativi. Per poter lavorare con questa aritmetica più "estesa" abbiamo dovuto ovviamente *definire le operazioni* sui numeri interi relativi *in modo tale che fossero mantenute le proprietà originarie delle operazioni aritmetiche*.

Tutte le "regole di calcolo" che permettono di operare con i numeri interi (come la "regola dei segni" per il prodotto, oppure la definizione di differenza tra due interi come somma del primo con l'opposto del secondo) non devono essere "dimostrate", in quanto sono state *create* dagli uomini per avere libertà nelle operazioni e mantenere le proprietà fondamentali dell'aritmetica; ciò che invece è stato dimostrato (e che anche noi avremmo dovuto dimostrare) è solo che, sulla base di tali definizioni, si mantengono le proprietà commutativa, associativa, distributiva dell'aritmetica.

Questo "modo di procedere" estendendo un insieme numerico in modo tale che le leggi che valgono nell'insieme originario continuino a valere nell'insieme più esteso prende il nome di

procedimento di GENERALIZZAZIONE.

Anche l'introduzione dell'insieme dei **numeri razionali**,

$$\mathbb{Q} = \left\{ x = \pm \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\} = \{ \text{numeri decimali finiti o periodici} \}$$

come estensione dei numeri interi è stata dettata da una doppia necessità. Una necessità *pratica*, cioè quella di non dover soltanto contare singoli oggetti, ma di dover *misurare delle quantità*, come lunghezze, aree, pesi, tempi; tali misure ammettono suddivisioni in parti "piccole quanto si vuole". Per risolvere il problema, il primo passo è *ridurre la questione del misurare al problema del contare*. Cominciamo con lo scegliere un'unità di misura del tutto arbitraria, secondo, metro, grammo, a seconda del caso, a cui attribuiamo la misura 1. Contiamo poi il numero di tali unità che sono contenute nella quantità da misurarsi. Un certo corpo, ad esempio, può pesare esattamente 54 grammi. In generale, però, questo procedimento non conduce ad un risultato esatto, cioè la quantità data non avrà una misura che si possa esprimere esattamente con multipli interi dell'unità di misura prescelta. Al massimo potremo dire che essa è compresa tra due multipli successivi dell'unità, ad esempio tra 32 e 33 grammi. Quando questo accade, si compie un altro passo introducendo nuove unità di ordine inferiore, ottenute con la suddivisione dell'unità originaria in un numero n di parti uguali. Nel linguaggio ordinario queste nuove unità possono avere nomi speciali; ad esempio, il metro si suddivide in 10 decimetri, l'ora in 60 minuti, il grammo in 10 decigrammi, etc. In matematica, comunque, un'unità di ordine inferiore ottenuta suddividendo l'unità originaria in

$$\frac{1}{n}$$

n parti uguali si indica con il simbolo $\frac{1}{n}$; e se una data quantità contiene esattamente m di queste unità di ordine inferiore, la sua misura si indica con il simbolo $\frac{m}{n}$. Tale simbolo si chiama **frazione** (o rapporto).

L'altra motivazione per l'estensione dei numeri interi ai numeri razionali è prettamente *aritmetica*, e deriva dal fatto che in \mathbf{Z} il quoziente tra due numeri a e b è definito solo se esiste un terzo numero intero q tale che $b \cdot q = a$, ossia se b è un divisore di a . L'introduzione del simbolo a/b , detto **frazione**, che per definizione è tale che

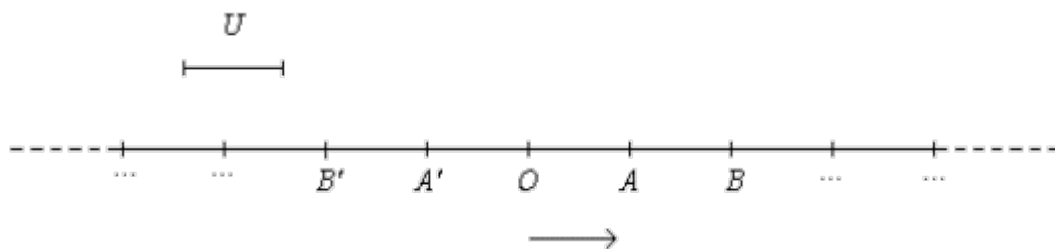
$$b \left(\frac{a}{b} \right) = a$$

risolve il problema (restando l'unica restrizione $b \neq 0$). Anche nel caso dei numeri razionali, come nel caso degli interi relativi, abbiamo a suo tempo definito le operazioni su di essi in modo tale da mantenere inalterate le proprietà formali valide in \mathbf{N} (® generalizzazione).

Prima di affrontare il passo successivo, ossia di estendere ulteriormente il nostro insieme numerico \mathbf{Q} , soffermiamoci ancora un momento sull'insieme \mathbf{Q} stesso per riprenderne la rappresentazione geometrica, poiché ci sarà utile nel seguito.

3.3 Rappresentazione geometrica dei numeri razionali. \mathbb{Q} è denso

Data una retta, fissiamo l'origine O , e prendiamo un segmento U come unità di misura, ad esempio il centimetro. Riportiamo più volte U consecutivamente a partire da O sia verso destra che verso sinistra:



Ai punti $\dots, B', A', O, A, B, \dots$ facciamo corrispondere i numeri interi $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$. Ognuno di tali punti si dice **immagine** del corrispondente numero. Con procedimento analogo

si può determinare il punto immagine di un numero frazionario qualsiasi $\pm \frac{m}{n}$: si costruisce il segmento $\frac{m}{n}U$ e lo si riporta sulla semiretta OA o OA' a seconda del segno. Il termine di questo segmento è il punto immagine della frazione considerata.

È evidente che i punti immagine delle frazioni si inseriscono tra i punti immagine dei numeri interi. Osserviamo un particolare fondamentale:

Per ogni numero intero ne esiste un altro che immediatamente lo precede nella successione ordinata dei numeri interi ed un altro che immediatamente lo segue.

Ad esempio il numero intero -3 è immediatamente preceduto dal numero intero -4 e seguito dal numero intero -2 .

Altrettanto NON PUÒ DIRSI PER I NUMERI RAZIONALI: considerata una qualunque frazione $\frac{a}{b}$, se prendiamo un'altra frazione $\frac{m}{n}$ maggiore di $\frac{a}{b}$ ma ad essa vicinissima (vicina "quanto vogliamo"), ne esiste comunque un'altra più vicina di quella da noi considerata. Si

può infatti dimostrare che la frazione $\frac{a+m}{b+n}$ è tale che:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+n} < \frac{m}{n}$$

Ad esempio consideriamo le frazioni

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{10^9} \quad \text{e} \quad \frac{m}{n} = \frac{2}{10^9},$$

che sono "vicinissime"; ebbene la frazione $\frac{3}{2 \cdot 10^9}$ è più vicina ad $\frac{a}{b}$ di quanto non lo sia $\frac{m}{n}$, e

la frazione $\frac{4}{3 \cdot 10^9}$ è ancora più vicina!

Questa proprietà si esprime dicendo che

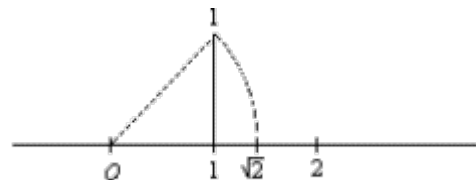
L'insieme dei numeri razionali è un insieme **denso**: per ogni coppia di numeri razionali ne esistono infiniti altri tra essi compresi.

A questo punto si potrebbe ragionevolmente pensare che i punti immagine dei numeri razionali riempiano completamente la retta, INVECE NON È COSÌ!!!

Infatti se ad esempio riportiamo sulla retta numerica il segmento ipotenusa del triangolo rettangolo i cui cateti misurano entrambi 1 otteniamo un punto che non è immagine di alcun numero razionale, ossia $\sqrt{2}$.

3.4 I numeri irrazionali

Dimostriamo innanzitutto che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale, ossia che esistono numeri che non sono razionali.



Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale; allora esisterebbe una frazione irriducibile $\frac{m}{n}$ tale che $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$. Dal fatto che $\frac{m}{n}$ è irriducibile (ossia che $\text{MCD}(m,n) = 1$), segue che anche $\frac{m^2}{n^2}$ deve essere irriducibile. Dall'ipotesi che abbiamo effettuato segue però che $\frac{m^2}{n^2} = 2$, ossia che $m^2 = 2 \cdot n^2$, e quindi che m^2 è multiplo di n^2 . Siamo pertanto arrivati ad una contraddizione, e quindi $\sqrt{2}$ non può essere un numero razionale.

Abbiamo dunque almeno un'entità non appartenente a \mathbf{Q} , quindi dobbiamo ampliare l'insieme dei numeri razionali, ed anche in questo caso abbiamo due motivazioni per farlo.

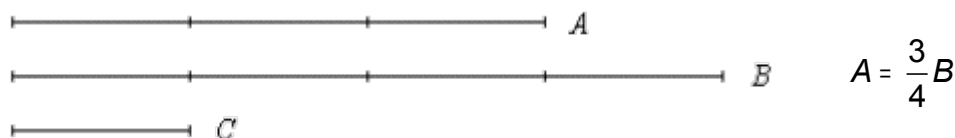
3.5 Esigenza "pratica" di estendere \mathbb{Q}

Abbiamo la necessità di *misurare* quantità che non sono esprimibili come frazioni dell'unità di misura; ad esempio dobbiamo poter misurare la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti misurino 1 e 2, oppure la lunghezza della diagonale di un quadrato il cui lato abbia misura 1.

Il problema della **misura delle grandezze geometriche** è ovviamente fondamentale nella trattazione di tutta la geometria e pertanto necessita di una unità didattica dedicata. Comunque, dal momento che tale problema è strettamente correlato ai numeri reali lo introduciamo brevemente adesso.

Un insieme di figure si dice costituire una *classe di grandezze geometriche* se è possibile definire per esse il concetto di uguaglianza e disuguaglianza, somma e differenza. A seconda delle particolari grandezze che si considerano, variano le definizioni di uguaglianza e somma, ma esse devono essere tali che continuino a valere le note proprietà formali dell'uguaglianza (riflessiva, simmetrica e transitiva) e della somma (commutativa e associativa). Le grandezze appartenenti ad una stessa classe sono dette *omogenee*, quelle appartenenti a classi diverse sono dette *eterogenee*. Ad esempio, costituiscono classi di grandezze omogenee tutti i segmenti, tutti gli angoli, etc.

Due grandezze omogenee si dicono **commensurabili** se esiste una terza grandezza contenuta un numero esatto di volte in entrambe le grandezze considerate (sottomultipla di entrambe). Ad esempio, i segmenti A e B in figura sono commensurabili perché hanno come sottomultipla comune il segmento C .



Il rapporto tra due grandezze commensurabili è un numero razionale, unico per ogni coppia di grandezze.

Come abbiamo già visto esistono grandezze omogenee **incommensurabili**, come ad esempio il lato e la diagonale di un quadrato, ed è per poter esprimere il rapporto tra grandezze di questo tipo che si introducono i numeri irrazionali.

N.B.: In questo paragrafo abbiamo fatto riferimento alle grandezze geometriche, che sono ovviamente sempre positive. Quindi il numero razionale corrispondente al rapporto tra due grandezze commensurabili è un numero razionale **assoluto**.

3.6 Esigenza aritmetica di estendere \mathbb{Q} e calcolo approssimato di $\sqrt{2}$

A livello prettamente *aritmetico*, la necessità di estendere l'insieme dei numeri razionali nasce ancora una volta dall'esigenza di effettuare senza restrizioni l'inversa di una operazione razionale, ossia dell'elevamento a potenza. Sappiamo che è possibile estrarre "esattamente" solo la radice n -esima di un numero che sia potenza n -esima, mentre negli altri casi è possibile estrarre la radice solo con un certo grado di approssimazione. Ad esempio, sappiamo che $2^3 = 8$, e quindi $\sqrt[3]{8} = 2$, ma non possiamo, con le operazioni razionali, calcolare quel numero che elevato alla seconda dia come risultato 2, ossia non possiamo calcolare esattamente $\sqrt{2}$.

Possiamo però utilizzare il seguente metodo per calcolarlo approssimato. Cominciamo con un'approssimazione decisamente "grossolana": consideriamo i due numeri interi dei quali sappiamo estrarre la radice quadrata (che sono cioè quadrati perfetti), che più si avvicinano al numero 2 (per eccesso e per difetto), ossia i numeri 1 e 4; poiché $1 < 2 < 4$, si ha che

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

Possiamo dunque scrivere che $\sqrt{2} \sim 1$, commettendo un errore di approssimazione che è al più di un'unità. Per approssimarlo meglio procediamo nel seguente modo: calcoliamo $(1,1)^2 = 1,21$; $(1,2)^2 = 1,44$; $(1,3)^2 = 1,69$; ..., finché non determiniamo il primo numero di questo tipo che supera 2, cioè $(1,5)^2 = 2,25$.

Ciò significa che $(1,4)^2 < 2 < (1,5)^2$, e quindi che $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$.

Scrivendo $\sqrt{2} = 1,4$ commettiamo un errore di al più un decimo. Miglioriamo ancora: poiché $(1,41)^2 = 1,9881 < 2$ e $(1,42)^2 = 2,0164 > 2$, allora $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ e possiamo scrivere $\sqrt{2} \sim 1,41$ commettendo un errore che è al massimo un centesimo.

È evidente che si può continuare in questo procedimento per quanto si vuole, ottenendo via via numeri che approssimano $\sqrt{2}$ sempre meglio.

Torneremo nel seguito sui calcoli approssimati e sugli errori di approssimazione; per ora limitiamoci ad osservare che i numeri utilizzati nel procedimento di approssimazione sono ancora razionali e che tale procedimento può andare avanti *indefinitamente* dando luogo ad un **allineamento decimale illimitato non periodico**.

Ai simboli $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, etc, diamo il nome di **numeri irrazionali**; il termine ha origine dalla contrapposizione con razionale, da "ratio" = rapporto (esprimibile tra grandezze omogenee commensurabili, Euclide 300 a.C.).

N.B.: Quando si lavora sugli irrazionali espressi come allineamenti decimali in realtà si lavora sempre e solo con **approssimazioni**, e se si vuole la **precisione** è necessario ricorrere al **simbolo** $\sqrt{5}$.

Su questi nuovi *enti*, in accordo al principio di generalizzazione, si opera come su quelli già noti col nome di numeri, ossia si definiscono le operazioni ed il concetto di uguaglianza in modo tale che siano conservate le proprietà formali.

N.B.: Con l'introduzione del nuovo insieme numerico, indicato con **J**, abbiamo risolto solo in parte il problema dell'operazione inversa dell'elevamento a potenza, nel senso che nonostante la nostra "estensione", abbiamo ancora delle restrizioni: poiché, infatti, dalla definizione delle operazioni sui numeri relativi, sappiamo che qualunque numero, positivo o negativo, elevato a potenza di esponente pari dà come risultato un numero positivo, è evidente che non è comunque possibile estrarre la radice pari di un numero negativo! Tutte le considerazioni che faremo d'ora in avanti, pur riguardando in generale i numeri relativi, daranno per inteso che si estragga la radice solo di numeri positivi. Ciò non deve indurre a pensare che i numeri irrazionali siano solo assoluti; basta infatti considerare, ad esempio, il "nuovo" numero $-\sqrt{5}$, opposto di $\sqrt{5}$: esso è un **irrazionale negativo!** Questa osservazione serve solo a precisare che se volessimo poter calcolare $\sqrt[4]{-3}$, avremmo bisogno ancora una volta di estendere il nostro insieme numerico (ai numeri detti **complessi**, nei quali si può effettivamente estrarre qualunque radice di qualunque numero, positivo o negativo).

L'insieme dei numeri razionali e di quelli irrazionali costituisce l'insieme dei **numeri reali** (il termine viene da Cartesio, 1600, in contrapposizione ad *immaginario*), che si indica con **R**.

OSS: Si potrebbe forse pensare che i numeri irrazionali costituiscano solo delle eccezioni, più o meno rare, nell'insieme dei numeri reali. Tale supposizione si rivela subito falsa se si pensa che ogni numero razionale può dar luogo ad infiniti numeri irrazionali, applicando ad esso infinite operazioni diverse (ad es. estrazione di radice quadrata, cubica, quarta, etc) che danno risultati irrazionali. Questa considerazione pone già da sola in evidenza, come si potrebbe anche dimostrare, che la maggior parte dei numeri reali sono irrazionali, e che sono proprio i numeri razionali a costituire delle "eccezioni" nei numeri reali.

3.7 I numeri reali.

Esempi di successioni numeriche contigue

Consideriamo il numero reale (intero) 6, e ragioniamo come se volessimo "approssimarlo". A partire da una approssimazione decisamente grossolana, commettendo un errore che è al più di due unità, possiamo approssimarlo con il numero razionale 5 o con il numero razionale 7; affiniamo ora la nostra operazione: se aggiungiamo 9 decimi a 5 e togliamo 9 decimi a 7, otteniamo altri due numeri razionali, 5.9 e 6.1, che approssimano il numero 6 meglio dei due precedenti (l'errore che si commette in questo caso è al più di $2 \cdot 10^{-1}$). Miglioriamo ulteriormente aggiungendo 9 centesimi a 5.9 e togliendoli a 6.1, approssimando quindi il 6 con un errore di al più $2 \cdot 10^{-2}$. Evidentemente, possiamo procedere in questo modo quanto a lungo vogliamo, ottenendo le due sequenze

$$\begin{array}{cccccc} 5 & 5.9 & 5.99 & 5.999 & 5.9999 & \dots & (1) \\ 7 & 6.1 & 6.01 & 6.001 & 6.0001 & \dots & \end{array}$$

di numeri razionali che approssimano il numero 6 sempre meglio.

Passiamo ad approssimare il numero reale (razionale) $\frac{7}{3} = 2,\bar{3}$: con un ragionamento del tutto simile al precedente si determinano le due sequenze di numeri razionali

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 2,3 & 2,33 & 2,333 & 2,3333 & \dots & (2) \\ 3 & 2,4 & 2,34 & 2,334 & 2,3334 & \dots & \end{array}$$

che lo approssimano a meno di 10^0 , 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} ,

Consideriamo infine il numero reale (irrazionale) $\sqrt{2}$, e le due sequenze di numeri razionali che abbiamo incontrato nel calcolarlo approssimato

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1,4 & 1.41 & 1.414 & 1.4142 & \dots & (3) \\ 2 & 1,5 & 1,42 & 1.415 & 1.4143 & \dots & \end{array}$$

che approssimano il numero $\sqrt{2}$ a meno di 10^0 , 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} ,

Analizziamo con attenzione le tre coppie di sequenze costruite (1), (2) e (3):

- esse sono costituite interamente da numeri razionali;
- la prima sequenza di ogni coppia è crescente, la seconda decrescente;
- tutti i numeri della prima sequenza di ogni coppia sono minori di tutti quelli della seconda sequenza;
- fissato un numero positivo ε piccolo quanto vogliamo è comunque possibile trovare una "posizione" nelle due sequenze di ogni coppia per cui la differenza tra i due numeri in quella posizione sia minore di ε . Ad esempio, nella (3), se fissiamo $\varepsilon =$

$\frac{3}{1000}$ e consideriamo la quinta posizione delle due sequenze, si ha che:

$$1.4143 - 1.4142 = \frac{1}{10000} < \varepsilon = \frac{3}{1000}$$

Le coppie di sequenze che verificano le proprietà appena esposte prendono il nome di successioni contigue di numeri razionali.

È intuitivamente evidente che gli elementi di due successioni contigue vadano sempre più avvicinandosi (per valori via via crescenti quelli della prima successione e via via decrescenti quelli della seconda) ad un numero che, maggiore di tutti quelli della prima successione e minore di tutti quelli della seconda, costituisce quello che si dice l'**elemento separatore delle**

due successioni. Nei tre casi visti negli esempi gli elementi separatori sono rispettivamente $6, \frac{7}{3}$ e $\sqrt{2}$.

Fermiamo la nostra attenzione su quanto abbiamo fatto. Siamo partiti da tre numeri ben determinati, $6, \frac{7}{3}$ e $\sqrt{2}$, abbiamo costruito le corrispondenti coppie di successioni contigue, ed abbiamo concluso che i tre numeri sono gli elementi separatori delle tre coppie di successioni. Se ora in qualche modo "ribaltiamo" il discorso, e lasciamo da parte gli esempi concreti, possiamo pensare che prendendo comunque due successioni contigue di numeri razionali, ossia due sequenze numeriche che verifichino le proprietà a)-d) prima esposte, sia possibile identificare un numero maggiore di tutti i numeri della prima successione e minore di tutti quelli della seconda, che sia l'elemento separatore delle due successioni. Ebbene questa è proprio la **definizione di numero reale**:

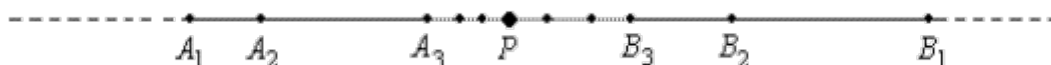
ogni numero reale è l'elemento separatore di una coppia di successioni contigue di razionali.

3.8 Rappresentazione geometrica di due successioni numeriche contigue.

Corrispondenza biunivoca retta-R

Quanto detto sulle successioni contigue di numeri razionali riesce più chiaro ed evidente ricorrendo alla rappresentazione geometrica dei numeri sulla retta. Consideriamo una qualunque coppia di successioni contigue di razionali $A = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ e $B = \{B_1, B_2, B_3, \dots\}$; tali successioni, essendo costituite da numeri razionali, sono rappresentabili geometricamente sulla retta numerica come successioni contigue di punti; inoltre le proprietà b)-d) di cui godono le due successioni, si traducono in analoghe proprietà sui punti immagine degli elementi delle successioni:

- b) i punti immagine degli elementi della prima successione (ossia i punti A_1, A_2, A_3, \dots) si susseguono verso destra, mentre i punti immagine della seconda successione (i punti B_1, B_2, B_3, \dots) si susseguono verso sinistra;
- c) ogni punto della prima successione precede tutti quelli della seconda;
- d) dato un segmento l piccolo a piacere, si possono trovare due punti corrispondenti delle due successioni la cui differenza sia minore di l .



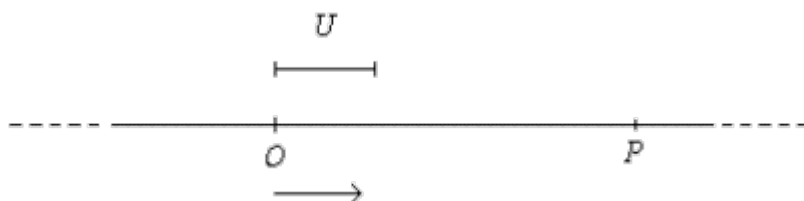
Le proprietà b) e c) ed il concetto intuitivo che abbiamo della retta come linea *continua* ci suggeriscono che tra i punti della prima successione e quelli della seconda non deve esserci alcuna *lacuna*, quindi deve esistere almeno un punto P che separa i punti delle due successioni. Questa nozione intuitiva è formalizzata nel Postulato della continuità della retta di Cantor

Dati su una retta due insiemi di punti A e B , che verifichino le proprietà b) e c), vi è sulla retta almeno un punto P che separa i due insiemi

Inoltre, grazie alla proprietà d), si può dimostrare che **tale punto è unico**.

Grazie al postulato di Cantor, ogni numero reale x ha la sua rappresentazione geometrica (o immagine), corrispondente al punto P di separazione al quale *tendono* le due successioni contigue di punti razionali che definiscono x .

Viceversa, possiamo far corrispondere ad ogni punto P della retta orientata un determinato numero reale x , corrispondente alla misura del segmento orientato \overline{OP} rispetto al segmento unitario fissato U ; x prende il nome di **ascissa** del punto P .



Rimane così stabilita una **corrispondenza biunivoca** tra i numeri reali ed i punti di una retta.

3.9 Cenni sulle operazioni e proprietà in \mathbb{R}

Abbiamo esattamente definito che cosa sia un numero reale, ossia l'elemento separatore di due successioni numeriche contigue; possiamo quindi indicare il generico numero reale x con la coppia di successioni che lo definisce:

$$x = (A;B) \quad \text{con} \quad A = \{A_1, A_2, A_3, \dots\} \quad \text{e} \quad B = \{B_1, B_2, B_3, \dots\}$$

A questo punto dovremmo studiare come sono definite tutte le operazioni sui numeri reali, ossia, dati due numeri reali $x = (A;B)$ e $y = (C;D)$, dovremmo definire la somma $x + y$ come elemento separatore di due successioni numeriche contigue, e fare altrettanto per l'opposto, la differenza, il prodotto, il quoziente, la potenza, a partire dalle successioni che definiscono x ed y . Per chiarire, la somma $x + y$ è definita come l'elemento separatore delle due successioni

$(A + C)$ e $(B + D)$, quindi, ad esempio, se $x = \sqrt{11} = (A;B)$ e $y = \frac{19}{24} = (C;D)$, con

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	...
3	3,3	3,31	3,316	3,3166	3,31662	...

B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	...
4	3,4	3,32	3,317	3,3167	3,31663	...

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	...
0	0,7	0,79	0,791	0,7916	0,79166	...

D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	...
1	0,8	0,8	0,792	0,7917	0,79167	...

Risulta $x + y = \sqrt{11} + \frac{19}{24} = (E;F)$ con

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	...
3	4	4,1	4,107	4,1082	4,10828	...

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	...
5	4,2	4,12	4,109	4,1084	4,1083	...

Successivamente dovremmo dimostrare che, avendo così definito le operazioni, continuano a valere per esse tutte le note proprietà. Tutta questa trattazione richiederebbe un tempo di notevole entità ed inoltre esula dalle finalità del nostro modulo. Pertanto non approfondiamo l'argomento, e nel seguito opereremo coi numeri reali in maniera "consueta", senza fare ricorso alle successioni numeriche contigue. Peraltro abbiamo effettuato un "salto logico" di questo tipo anche in prima, quando abbiamo lavorato sui numeri interi e razionali: pur sapendo che un numero intero è definito come coppia formata da un numero naturale e da un segno, e che un numero razionale è definito come insieme infinito di frazioni equivalenti, li abbiamo trattati tutti alla stessa stregua, anche se ognuno con le proprie peculiarità operative.

In conclusione, d'ora in avanti il nostro insieme numerico di riferimento sarà l'insieme dei numeri reali, di cui **N**, **Z**, **Q**, e **J** costituiscono sottoinsiemi:

